

Distancia de un punto a una recta.

Por: Equipo 10.

June 2, 2015

Definición.

Sea L una recta que pasa por el punto P_0 , y Q , un punto que no pertenece a la recta. La distancia de Q a L , $d(Q, L)$ es la longitud del segmento dirigido con punto inicial en L y punto final en Q .

Teorema

La distancia de un punto Q a una recta L , en R^2 esta dada por:

$$\left| \text{Proy}_{\vec{n}}(\vec{Q} - P_0) \right| = d(Q, L) = \frac{|Ax + By + Cz|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Dem.

Se tiene que

$$Q - P_0 = (x, y) - (x_0, y_0) = (x - x_0, y - y_0)$$

Entonces

$$\left| \text{Proy}_{\vec{n}}(\vec{Q} - P_0) \right| = \left| \frac{(\vec{Q} - P_0) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \left| \frac{(\vec{Q} - P_0) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \frac{(x - x_0, y - y_0) \cdot (A, B)}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

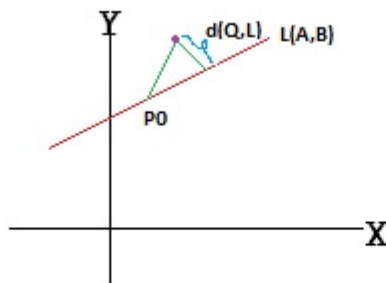


Figure 1:

$$= \frac{|Ax - Ax_0 + By - By_0|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax + By - Ax_0 - By_0|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Como $P_0 \in L$, por lo que satisfacen la ecuación cartesiana general

$$Ax + By + C = 0$$

$$Ax_0 + By_0 + C = 0 \Rightarrow C^2 - Ax_0 - By_0$$

$$\therefore d(Q, L) = \frac{|Ax + By + Cz|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \square$$

En R^3

$$d(Q, L) = \sin \theta |Q - P_0|$$

$$= \frac{|\vec{ax}(Q - P_0)|}{|\vec{a}| |Q - P_0|} |Q - P_0|$$

$$= \frac{|\vec{ax}(Q - P_0)|}{|\vec{a}|}$$

Ejemplo:

Calcula la distancia que existe entre el punto $(2, 1)$ y la recta $L = \{P \mid P = (1, 1) + t(2, 2), t \in R\}$

Solución 1.

$$d(Q, L) = \left| \text{Proy}_{\vec{n}}(\vec{Q} - P_0) \right|$$

$$= |\text{Comp}_{\vec{n}} Q - P_0|$$

$$Q - P_0 = (2, 1) - (1, 1) = (1, 0)$$

$$d(Q, L) = \frac{|(1, 0) - (-2, 2)|}{\sqrt{(-2)^2 + (2)^2}}$$

$$= \frac{|-2|}{\sqrt{8}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{8}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Solución 2.

$$\begin{aligned}d(Q, L) &= \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\&= \frac{|(-2)(2) + (2)(1) + 0|}{\sqrt{8}} \\&= \frac{|-4 + 2|}{\sqrt{8}} \\&= \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$